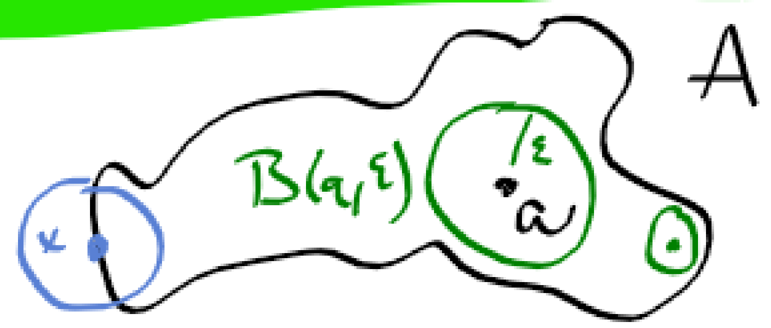
Opakování: • (M,ρ) MP : $\rho : M\times M \to [0,\infty)$

splňující: (i) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ je metrika.

- $B_\rho(a,\delta) = B(a,\delta) = \{x\in M : \rho(x,a) < \delta\}$ ... ot. koule
- $A \subseteq M$ je otevřená $\overset{def.}{\iff}$ $\forall a\in A \ \exists \varepsilon>0 : B(a,\varepsilon)\subseteq A$
- L37: $B(a,\delta)$ je ot. mn.



- $a\in M$ je hraniční bod A $\overset{def.}{\iff}$

$\overset{def.}{\iff}$ $\forall \varepsilon>0 : B(a,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B(a,\varepsilon)\cap \underbrace{A^c}_{M\setminus A} \neq \emptyset.$

$H(A)$... hranice = mn. všech hr. bodů A.

- $\overline{A} \overset{def.}{=} A\cup H(A)$
- A je uzavřená $\overset{def.}{\iff}$ $H(A)\subseteq A$.

Pozorování 40: $A\subseteq M$ je otevřená $\iff$ $A\cap H(A)=\emptyset$

Tj. pokud A obsahuje něj. hraniční bod A, pak A není otevřená (a naopak).

Důkaz: $(\Rightarrow)$ Pokud $x\in H(A)$, pak $x\notin A^\circ$ (z def.)

Ovšem A obsahuje pouze vnitřní body A (je ot.!)

$(\Leftarrow)$ nechť A není otevřená. Tj. podle definice

$$\neg\left(\forall a\in A \ \exists\varepsilon>0 : B(a,\varepsilon)\subseteq A\right)$$

tj. $\underline{\exists a\in A} \ \forall \varepsilon>0 : B(a,\varepsilon)\not\subseteq A$

Pak ale pro toto a je

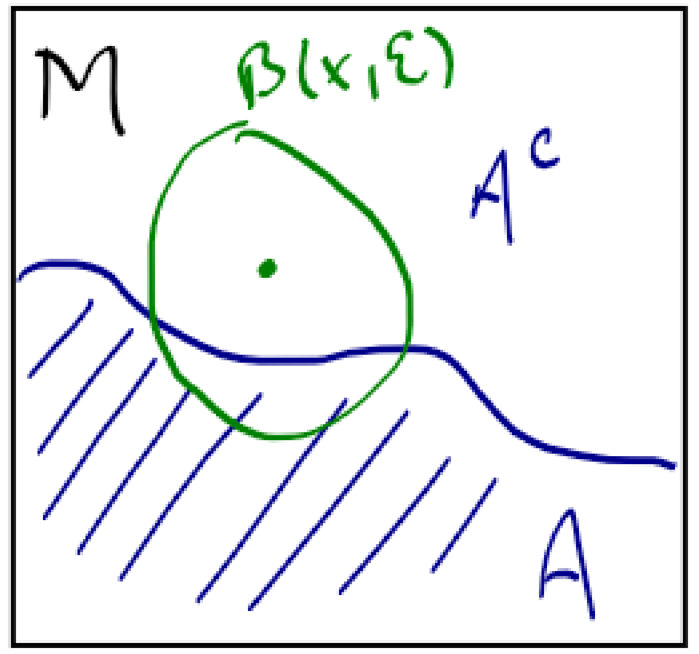
$$B(a,\varepsilon)\cap A \underset{\text{neboť } a\in A}{\supseteq} \{a\} \neq \emptyset$$

a zároveň, protože $B(a,\varepsilon)\not\subseteq A$, musí protínat A^c, neboli $B(a,\varepsilon)\cap A^c \neq \emptyset$.

Tedy podle definice hranice $a\in H(A)$ (máme to pro každé $\varepsilon>0$). $\blacksquare$

Pozorování 41: Buď (M, ρ) MP, $A \subseteq M$.

Pak $H(A) = H(A^c)$.



Důkaz:

$x \in H(A) \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$x \in H(A^c) \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap \underbrace{(A^c)^c}_{A} \neq \emptyset$

ale $(A^c)^c = (M \setminus A)^c = M \setminus (M \setminus A) = A$.

Tedy oba výroky jsou triviálně ekviv.

Tzn. že $x \in H(A) \iff x \in H(A^c)$, neboli

$$H(A) = H(A^c).$$ ⊠

Pozn.: $\forall A \subseteq M: A^\circ \subseteq A \subseteq A \cup H(A)$, neboli

$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, $\overline{A} \setminus A^\circ = H(A)$

Pozorování 42: Buď (M, ρ) MP, $A \subseteq M$.

Pak $M = A^\circ \cup H(A) \cup (A^c)^\circ$, kde každé dvě mn. napravo jsou disjunktní.

Důkaz: Disjunktnost je jasná (cv.)

Nechť $x \in M$, $x \notin A^\circ \cup H(A)$.

Tj. $\forall \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \not\subseteq A$ $\wedge$

$\wedge\ \exists \varepsilon > 0: \neg \left(B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \right)$

Tj. $\forall \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \not\subseteq A$ $\wedge$

$\wedge\ \exists \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset \vee B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$.

Vezměme takové $\varepsilon > 0$. Kdyby $B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$ musela by být $\subseteq A$, ale to není! Tedy musí platit $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, tj. $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$. Tj. $x \in (A^c)^\circ$. ⊠

Věta 43: (Charakterizace uz. mn.)

(M,ρ) MP, $A \subseteq M$. Pak NVJE:

(i) A je uzavřená (v M);

(ii) A^c je otevřená (v M);

(iii) $\overline{A} = A$

(iv) $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ konvergentní: („nelze vykonvergovat z A") $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.

Důkaz: (i) $\Leftrightarrow$ (ii):

A je uz. $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} H(A) \subseteq A \overset{\text{P41}}{\Longleftrightarrow} H(A^c) \subseteq A \; \boxed{\Longleftrightarrow}$ Cv.

$\Longleftrightarrow H(A^c) \cap A^c = \emptyset \overset{\text{P40}}{\Longleftrightarrow} A^c$ je ot.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): A je uz. $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} H(A) \subseteq A \; \boxed{\Longleftrightarrow}$ Cv.

$\Longleftrightarrow \underbrace{A \cup H(A)}_{\overline{A}} = A \Longleftrightarrow$ tj. $\overline{A} = A$.

(iv): na cvičení. $\square$

Příklad 44: (a) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je uz. v $\mathbb{R}$, není otevřená.

- $H([a,b]) = \{a,b\} \Longrightarrow$ je uz.!
- $[a,b] = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left((-\infty,a) \cup (b,\infty)\right)}_{\text{ot.}}$

(b) $[a,b)$ není uzavřená, ani ot. v $\mathbb{R}$.

$H([a,b))$ je $\{a,b\}$.

- $[a,b)$ obsahuje prvek své hranice $\overset{\text{P40}}{\Longrightarrow}$ není ot.
- $[a,b)$ neobsahuje celou hranici $\overset{\text{def.}}{\Longrightarrow}$ není uz.

Pozorování: „Množiny nejsou jako dveře."

(c) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ jsou obojetné v $\mathbb{R}$

(tj. ot. i uz.)

(d) $\{1\}$ je uz., není ot.

(e) v $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{R}^d \setminus \underbrace{B(0,1)}_{\text{je otevřená}}$ je uz.

Věta 45: (Vlastnosti uz. množin) Buď (M,ρ) MP.

Pak: (i) M, $\emptyset$ jsou uz.

(ii) Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ uz., pak $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je uz.

(iii) Jsou-li A_α uz. pro všechna $\alpha \in I$ (I je libovolná „indexová" množina), pak

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ je uz.}$$

Důkaz: Pomocí De Morganových vzorců:

(ii) $$M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(M \setminus \underbrace{A_i}_{\text{uz.}})}_{\text{ot. (V43)}}}_{\text{ot. (V38)}}$$

je otevřená, takže $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je uz.

Podobně lze ukázat (iii) V43 pomocí V38(iii).

$$\left(M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} M \setminus A_\alpha \right)$$

nebo: Pomocí bodu (iv) V43 (nelze vykonv.)

(i) je jasná (iii) snadné Cv.

(ii) mějme $\{x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pak existuje

$\{x_{n_k}\} \subseteq A_i$ pro nějaké i. (Proč?)

Ale A_i je uz., a tedy $\lim x_n = \lim x_{n_k} \in A_i$ $\boxtimes$

Definice 46 (Spojitost zobrazení mezi MP)
Buď (M,ρ) a (N,σ) MP, $f: M \to N$.
Řekneme, že f je spoj. v bodě $a \in M$, p.
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M: x \in B_\rho(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B_\sigma(f(a),\varepsilon).$$

Poznámka 47: $g, f: M \to \mathbb{R}$ spoj. Pak
(i) $f+g$ je spoj. (ii) $c \cdot f$ je spoj.
apod.
Viz též V5. **Dk**: vynecháme (1. SEM.).

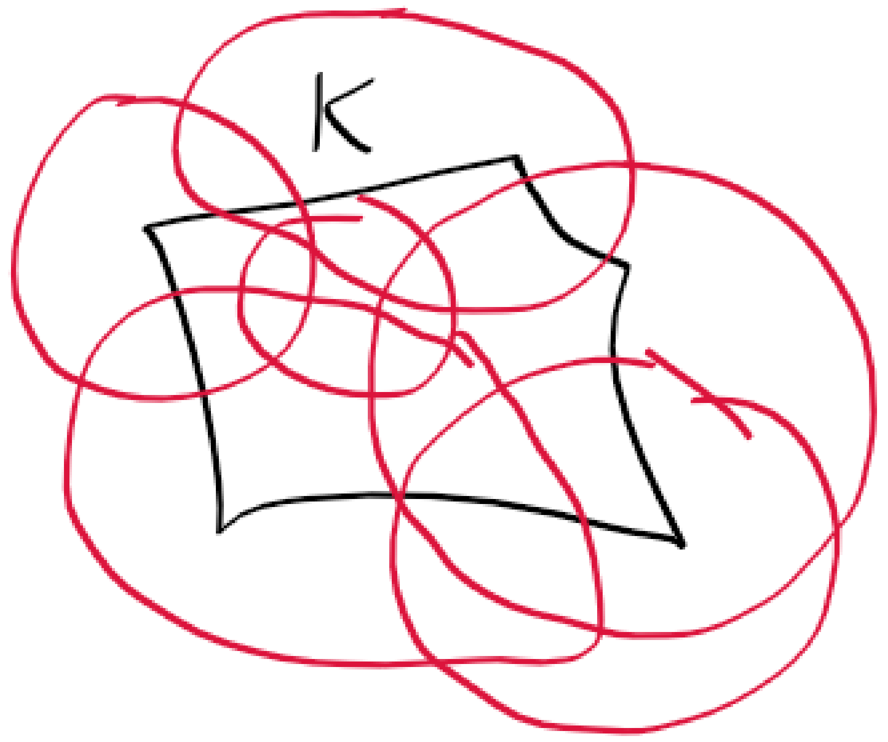
Věta 48: (Heineho definice spojitosti) (M,ρ) MP, $f: M \to \mathbb{R}$ je fce, $c \in M$. Pak NVJE
(i) f je spoj. v bodě c
(ii) $\forall \{x_n\}: \lim x_n = c \Rightarrow \lim f(x_n) = f(c)$.

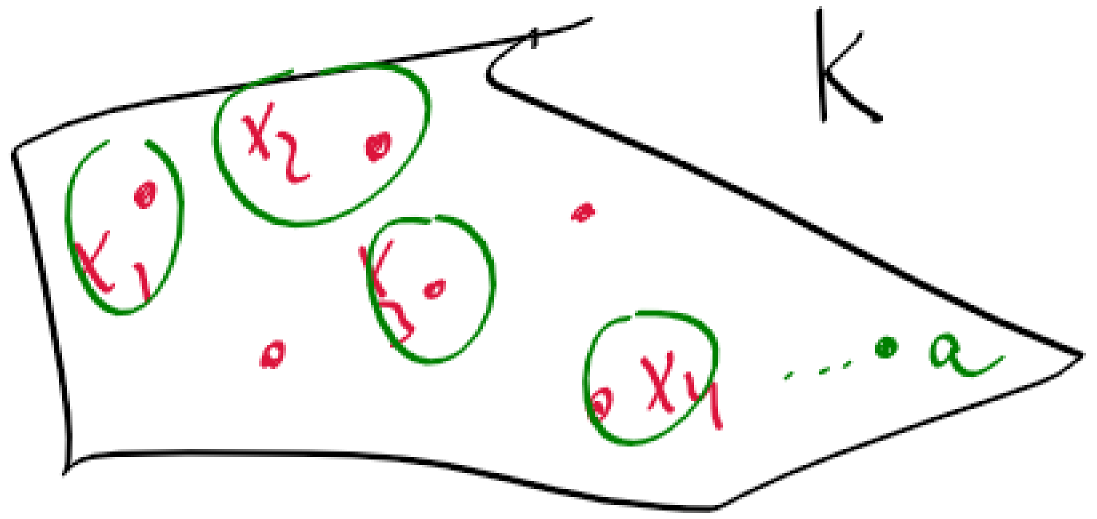
Věta 49: Buď (M,ρ) M.P., $f: M \to \mathbb{R}$ fce.
Pak NVJE:
(i) f je spojitá (na M);
(ii) $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ot.: $f^{-1}(G)$ je ot.
(iii) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ uz.: $f^{-1}(F)$ je uz.
($f^{-1}(A) = \{x \in M: f(x) \in A\}$.)

Důkaz: na cvičení. ☒

Definice 50: (Kompaktní množina)
Buď (M,ρ) MP, $K \subseteq M$.
Řekneme, že K je kompaktní, jestliže každá posl. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K$ má konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Pozn. Ta správná definice (ekviv. pro MP) kompaktu je: „Každé otevřené pokrytí K má konečné podpokrytí."





Věta 51 (O nabývání extrému na komp. mn.)

Buď (M,ρ) m.p., M je kompaktní.

Nechť $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá.

Pak f nabývá svých extrémů na M.

Tj. $\exists\, a, A \in M$:

$$f(a) = \min_{x\in M} f(x) \quad \left(= \inf_{x\in M} f(x)\right)$$

$$f(A) = \max_{x\in M} f(x) \quad \left(= \sup_{x\in M} f(x)\right).$$

Důkaz: Dokážeme minimum. (Max. analog.)

Označme $m = \inf_{x\in M} f(x) \in [-\infty, \infty)$.

Podle definice infima:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : \ m \le f(x) < m + \varepsilon.$$

Rekurzí najdeme posloupnost $\{x_n\} \subseteq M$:

Pro $\varepsilon = \frac{1}{n} \rightsquigarrow x_n \in M$: $\ m \le f(x_n) < m + \frac{1}{n}$.

Zřejmě $f(x_n) \to m$ (LO2P).

Protože M je komp. (a $\{x_n\} \subseteq M$),

existuje $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní, $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Podle V48} & f(x_{n_k}) \to f(a) \\ \text{ale víme} & f(x_{n_k}) \to m\end{array}\right\} \overset{\text{jednozn.}}{\underset{\text{limity}}{\Longrightarrow}} f(a) = m$$

Tedy v bodě a se nabývá minima. ∎